数理解析研究所講究録
909巻 1995年 102-112

DISCRETE SERIES WHITTAKER FUNCTIONS OF $SU(N,1)$

谷口　健二 (Kenji TANIGUCHI)

東京大学数理科学研究科

0. 導入

G を連結半単純 Lie 群、$G=KAN$ をその岩沢分解、$\eta: N\to\mathbb{C}^\times$ を N のユニタリ指標とする。

$$C^\infty(G/N;\eta):=\left\{\phi: G\overset{C^\infty}{\to}\mathbb{C}\ ;\ \phi(gn)=\eta(n)^{-1}\phi(g)\quad(g\in G, n\in N)\right\}$$

という関数空間は左移動により G の表現空間となる。(π,W) を G の表現としたとき、(π,W) の $C^\infty(G/N;\eta)$ における実現を (π,W) の Whittaker model という。

Whittaker model を決定することは、(π,W) から $C^\infty(G/N;\eta)$ への intertwining operator ι を決定することと同値である。

ここでは G が $SU(n,1)$ $(n\geq 2)$ の場合の離散系列表現の minimal K-type Whittaker 関数の explicit な表示について述べる。

1. 記号

まず本稿で使う記号をまとめて記述しておく。

G : 連結半単純 Lie 群、中心有限で離散系列表現を持つものとする。

$\mathfrak{g}$: G の Lie 環。$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$: $\mathfrak{g}$ の複素化。$\mathfrak{g}^*$: $\mathfrak{g}$ の双対空間。以下、他の群などについても同様の記法を用いる。

$B(\ ,\ )$: $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の Killing 形式。

$G=KAN, \mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$: 岩沢分解。$M=Z_K(\mathfrak{a})$ 。

θ : $\mathfrak{g}$ の Cartan involution 。$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上に複素共役線形に拡張しておく。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$: 対応する Cartan 分解。

$\mathfrak{t}\subset\mathfrak{k}$: コンパクト Cartan 部分環。

$\Delta=\Sigma(\mathfrak{t}_\mathbb{C},\mathfrak{g}_\mathbb{C})$: ルートの集合。

$\mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha$: $\alpha\in\Delta$ に対応するルート空間。

$\Delta_c=\{\alpha\in\Delta\ ;\ \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha\subset\mathfrak{k}_\mathbb{C}\}$: コンパクトルートの集合。

$\Delta_n=\Delta-\Delta_c$: ノンコンパクトルートの集合。

$\Delta_c^+\subset\Delta^+$: それぞれ Δ_c,Δ の positive systems 。

$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$, $\rho_c = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_c^+}\alpha$

$(\ ,\ )$: Killing 形式より定まる $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 上の内積。

$\langle\ ,\ \rangle$: ベクトル空間とその双対空間との coupling 。

E_{ij} : (i,j)-成分が 1 で他の成分は 0 である正方行列。

2. Whittaker model の実現方法

まず離散系列表現の基礎知識の復習をしておく。
$\Lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ で
(1) $(\Lambda, \alpha) \neq 0$ for any $\alpha \in \Delta$
(2) $\Lambda + \rho$ は K-integral
を満たすものの集合を Ξ で表す。このとき$\Xi_c^+ := \{\Lambda \in \Xi; (\Lambda, \alpha) > 0 \text{ for } {}^\forall\alpha \in \Delta_c^+\}$ は G の離散系列は parametrize する。$\Lambda \in \Xi_c^+$ を G の離散系列表現の Hairish-Chandra パラメーターといい、対応する離散系列表現を π_Λ で表す。別の言い方をすれば、Δ_i^+ $(i = 1, \ldots, l)$ をΔ_c^+ を含む Δ の positive systems として

$$\Xi_i = \{\Lambda \in \Xi;\ (\Lambda, \alpha) > 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta_i^+\}$$

と置いたとき、$\Xi_c^+ = \bigcup_{i=1}^{l} \Xi_i$ であるので、$\bigcup_{i=1}^{l} \Xi_i$ が G の離散系列表現の Harish-Chandra パラメーターの集合となっている。

このとき $\Lambda \in \Xi_i$ に対して

$$\lambda = \Lambda + \rho_i - 2\rho_c$$

$\left(\text{但し } \rho_i = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_i^+}\alpha\right)$ とすると、λ は π_Λ の minimal K-type の highest weight になっている。この λ を π_Λ の Blattner パラメーターという。

η を N のユニタリ指標としたとき、一般に K の有限次元連続表現 (τ, V) に対して

$$\begin{aligned} &C_\tau^\infty(K\backslash G/N; \eta) \\ &\quad = \left\{f : G \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{C}; f(kgn) = \eta(n)^{-1}\tau(k)f(g)\ \ (k \in K, g \in G, n \in N)\right\} \end{aligned}$$

という関数空間を考える。

K の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の随伴作用は K の表現となるので、これを $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ と表す。$\{X_i\}$ を $\mathfrak{p}$ の Killing 形式についての正規直交基底として、

$$\nabla_{\tau,\eta}\phi(g) = \sum_i L_{X_i}\phi(g) \otimes X_i \quad (\phi \in C_\tau^\infty(K\backslash G/N; \eta))$$

(但し $L_{X_i}\phi(g) = \frac{d}{dt}\phi(\exp(-tX_i)g)|_{t=0}$ $(g \in G)$) という微分作用素を考えると、これは $C_\tau^\infty(K\backslash G/N; \eta)$ から $C_{\tau\otimes\mathrm{Ad}}^\infty(K\backslash G/N; \eta)$ への写像で、左からの K の作用と可換なものになっている。

(τ_μ, V_μ) で highest weight が μ である K の既約有限次元表現を表す。λ を G の離散系列表現の Blattner パラメーターで $\Lambda \in \Xi_i$ に対応するものとすると、

$$(\tau_\lambda, V_\lambda) \otimes (\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq (\tau_\lambda^+, V_\lambda^+) \oplus (\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$$

という分解が得られる。但し

$$(\tau_\lambda^\pm, V_\lambda^\pm) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{i,n}^+} m(\alpha)(\tau_{\lambda\pm\alpha}, V_{\lambda\pm\alpha}) \quad (m(\alpha) = 0, 1)$$

とした。

この分解に即して

$$P : (\tau_\lambda, V_\lambda) \otimes (\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow (\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$$

という $(\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$ への projection operator P を定め、

$$\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta} = P \circ \nabla_{\tau_\lambda, \eta} : C^\infty_{\tau_\lambda}(K\backslash G/N; \eta) \longrightarrow C^\infty_{\tau_\lambda^-}(K\backslash G/N; \eta)$$

で作用素 $\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ を定義する。

定理 ([Y1, Theorem 2.4])

π_Λ^* で π_Λ の反傾表現を表す。λ が「壁から遠い」とき、つまり 任意の $Q \subset \Delta_{i,n}^+$ に対して $\lambda - \sum_{\beta \in Q} \beta$ が Δ_c^+-dominant であるとき、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta)) \simeq \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$$

という同型が存在する。

更にこの対応

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta)) \ni \iota \Longleftrightarrow F^\iota \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$$

は π_Λ^* の a minimal K-type vector v^* に対して

$$\iota(v^*)(g) = \langle v^*, F^\iota(g) \rangle \quad (g \in G)$$

で与えられる。

この方法を用いて、$G = SU(n,1)$ の minimal K-type Whittaker 関数を求める。

以下 $\mathbb{R}$-rank 1 の群を扱うので、この場合の計算が少し簡素化されることを説明しておく。

G が $\mathbb{R}$-rank 1 の群の時、$\mathfrak{a}^*$ の基底として適当な $f \in \mathfrak{a}^*$ を定めておくと、$\Sigma^+ = \Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{f\}$ または $\{f, 2f\}$ と表される。N のユニタリ指標の集合 $\hat{N}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}_f^*$ は

$$\eta(\exp(X+Y)) = \exp(\langle \sqrt{-1}\xi, X \rangle) \quad (X \in \mathfrak{g}_f, Y \in \mathfrak{g}_{2f},\ \eta \in \hat{N},\ \xi \in \mathfrak{g}_f^*)$$

により同一視される。

補題

$\mathbb{R}$-rank $G=1$ で G は $SL(2,\mathbb{R})$ と同型ではないとき、任意の $0\neq X\in\mathfrak{g}_f$ に対して、$\mathfrak{g}_f-\{0\}=\mathrm{Ad}(M)\mathbb{R}_{>0}X$ が成り立つ。

M の $\hat{N}$ への作用 $\eta\mapsto\eta^m$ $(m\in M)$ を$\eta^m(n)=\eta(m^{-1}nm)$ $(n\in N)$ で定義すると、上の補題より

系

G が $\mathbb{R}$-rank one で $SL(2,\mathbb{R})$ と同型でないとする。このとき

(1) N の自明でない任意の 2 つの ユニタリ指標 η_1,η_2 に対して、$m\in M$ と $c\in\mathbb{R}_{>0}$ があって、$\eta_1(\exp X)=\eta_2^m(\exp cX)$ が任意の $X\in\mathfrak{n}$ に対して成り立つ。

(2)
$$C^\infty(G/N;\eta)\ni\phi(x)\mapsto\phi^m(x)=\phi(xm)\in C^\infty(G/N;\eta^m)$$
は任意の $m\in M$ に対して G-modules の同型である。

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*,C^\infty(G/N;\eta))\simeq\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}\ni\phi(x)&\\ \mapsto\phi^m(x)=\phi(xm)\in\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta^m}\simeq\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*,C^\infty(G/N;\eta^m))&\end{aligned}$$
は線形同型である。

よって $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ を求めるには「計算し易い」 η の場合について計算すれば十分であることが分かる。

3. 計算の実行と主結果

まず $SU(n,1)$ の構造を復習する。

$I_{n,1}=\begin{pmatrix}1_n & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ として
$$G=SU(n,1)=\left\{g\in SL(n+1,\mathbb{C});{}^t\bar{g}I_{n,1}g=I_{n,1}\right\}$$
で $SU(n,1)$ は定義される。このとき $\mathfrak{g}$ と K は
$$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(n,1)=\{X\in\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})\ ;\ {}^t\bar{X}I_{n,1}+I_{n,1}X=0\}$$
$$K=G\cap U(n+1)=\left\{\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & (\det k)^{-1}\end{pmatrix}\ ;\ k\in U(n)\right\}\simeq U(n)$$
で表される。

$\mathfrak{g}$ のコンパクト Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ を
$$\mathfrak{t}=\left\{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n+1}a_iE_{ii}\ ;\ a_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n+1}a_i=0\right\}$$

で定める。e_i を $e_i\left(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i E_{ii}\right) = \sqrt{-1}a_i$ で定義すると、

$$\Delta = \{e_i - e_j;\ 1 \le i \ne j \le n+1\}$$
$$\Delta_c = \{e_i - e_j;\ 1 \le i \ne j \le n\}$$

であるので、

$$\Delta_c^+ = \{e_i - e_j;\ 1 \le i < j \le n\}$$

とすると、これを含む Δ の positive systems は $n+1$ 個あって、それらをその simple roots で表すと

$$\begin{aligned}
\Delta_1^+ &\Longleftrightarrow \Pi_1 = \{e_{n+1} - e_1, e_1 - e_2 \ldots, e_{n-1} - e_n\} \\
\Delta_2^+ &\Longleftrightarrow \Pi_2 = \{e_1 - e_{n+1}, e_{n+1} - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\} \\
&\cdots \\
\Delta_k^+ &\Longleftrightarrow \Pi_k = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{k-1} - e_{n+1}, e_{n+1} - e_k, \ldots, e_{n-1} - e_n\} \\
&\cdots \\
\Delta_{n+1}^+ &\Longleftrightarrow \Pi_{n+1} = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_{n+1}\}
\end{aligned}$$

となる。

ここで $\sum_{i=1}^{n+1} e_i$ は $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上 0 で作用するので、e_{n+1} を $-\sum_{i=1}^{n} e_i$ と見ることにより $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}e_i$ と同一視できる。すると

$$\Xi_k = \left\{\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i e_i;\ \Lambda_1 > \cdots > \Lambda_{k-1} > 0 > \Lambda_k > \cdots > \Lambda_n\ (\Lambda_i \in \mathbb{Z})\right\}$$

とおいたとき、$\bigcup_{k=1}^{n+1} \Xi_k$ は Harish-Chandra パラメーターの集合となり、対応する Blattner パラメーターは

$$\Xi_k \ni \Lambda \Leftrightarrow \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\Lambda_i + k + i - n - 1)e_i + \sum_{i=k}^{n} (\Lambda_i + k + i - n - 2)e_i$$

と書ける。

一方、$\mathfrak{p} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (z_i E_{i,n+1} + \bar{z}_i E_{n+1,i});\ z_i \in \mathbb{C}\right\}$ であるから、

$$(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq (\tau_{2e_1+e_2+\cdots+e_n}, V_{2e_1+e_2+\cdots+e_n}) \bigoplus (\tau_{-e_1-\cdots-e_{n-1}-2e_n}, V_{-e_1-\cdots-e_{n-1}-2e_n})$$

が成り立つ。よって K の既約表現の highest weight が $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ である時、

$$(\tau_\lambda, V_\lambda) \otimes (\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (\tau_k^+, V_k^+) \bigoplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\tau_k^-, V_k^-)$$

と既約分解される。但し、

$$(\tau_k^{\pm}, V_k^{\pm}) = (\tau_{\lambda \pm e'_k}, V_{\lambda \pm e'_k}) \qquad \left(e'_k := \sum_{i=1}^{n} e_i + e_k \right)$$

とした。

一方、$\left\{ \frac{E_{i,n+1}+E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}}, \sqrt{-1}\frac{E_{i,n+1}-E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}} \ (1 \le i \le n) \right\}$ を $\mathfrak{p}$ の正規直交基底として採用することができるので、これを $\nabla_{\tau_\lambda,\eta}$ の計算に用いる。

$H = E_{n,n+1} + E_{n+1,n}$ とすると、$\mathbb{R}H = \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間で、$f \in \mathfrak{a}^*$ を $f(H) = 1$ で定義すると、$\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{\pm f, \pm 2f\}$ であるので、$\Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{f, 2f\}$ ととると、$\mathfrak{g}_f$ の基底として

$$\begin{aligned} X_i &= E_{in} - E_{i,n+1} - E_{ni} - E_{n+1,i} \quad (1 \le i \le n-1) \\ Y_i &= \sqrt{-1}(E_{in} - E_{i,n+1} + E_{ni} + E_{n+1,i}) \ (1 \le i \le n-1) \end{aligned}$$

が、また $\mathfrak{g}_{2f}$ の基底として

$$W = \sqrt{-1}(E_{nn} - E_{n,n+1} + E_{n+1,n} - E_{n+1,n+1})$$

が、それぞれとれる。

ここで「計算しやすい」$\eta \in \hat{N}$ として

$$(**) \quad \eta \left(\exp \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i X_i + y_i Y_i) + wW \right) \right) = e^{\sqrt{-1} y_{n-1} \xi} \quad (x_i, y_i, w \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}_{>0})$$

となるものをとり、A の座標として

$$\mathbb{R}_{>0} \ni a \mapsto \exp((\log a)H) \in A$$

を採用する。

$K \simeq U(n)$ だから highest weight が $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \ (\mu_i \in \mathbb{Z}, \ \mu_i \ge \mu_{i+1})$ である K の既約有限次元表現 (τ_μ, V_μ) を実現するために Gel'fand-Zetlin 基底 $GZ(\mu) = \{Q\}$ を用いる。

ここで $\mathfrak{u}(n)$ の、よって $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の Gel'fand-Zetlin 基底の説明をしておく。

highest weight が $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ である K の既約有限次元表現 V_μ に対して、

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{1,n} \ \ q_{2,n} \ \ \cdots\cdots \ \ q_{n-1,n} \ \ q_{n,n} \\ q_{1,n-1} \ \ q_{2,n-1} \cdots \ q_{n-1,n-1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots \\ q_{1,2} \ \ q_{2,2} \\ q_{1,1} \end{pmatrix}$$

という形の図形で

$$\begin{cases} q_{i,j} - q_{i,j-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,j-1} - q_{i+1,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,n} = \mu_i \ (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

をみたすものの集合を $GZ(\mu)$ で表すと、これは V_μ の基底をなす。$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の元 E_{ij} の作用は、

$$\tau_\mu(E_{j,j+1})Q = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(Q)\sigma_{i,j}Q$$

$$\tau_\mu(E_{j+1,j})Q = \sum_{i=1}^{j} b_{i,j}(Q)\tau_{i,j}Q$$

$$\tau_\mu(E_{jj})Q = \left(\sum_{i=1}^{j} q_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} q_{i,j-1}\right)Q$$

で与えられる。但し

$$a_{i,j}(Q) = \sqrt{\left|\frac{\prod_{k=1}^{j+1}(q_{k,j+1}-q_{i,j}-k+i)\prod_{k=1}^{j-1}(q_{k,j-1}-q_{i,j}-k+i-1)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j}(q_{k,j}-q_{i,j}-k+i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j}(q_{k,j}-q_{i,j}-k+i-1)}\right|}$$

$$b_{i,j}(Q) = \sqrt{\left|\frac{\prod_{k=1}^{j+1}(q_{k,j+1}-q_{i,j}-k+i+1)\prod_{k=1}^{j-1}(q_{k,j-1}-q_{i,j}-k+i)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j}(q_{k,j}-q_{i,j}-k+i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j}(q_{k,j}-q_{i,j}-k+i+1)}\right|}$$

σ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j}+1$ にし、他の $q_{k,l}$ はそのままにする

τ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j}-1$ にし、他の $q_{k,l}$ はそのままにする

とした。一般の $E_{k,l}$ の作用は、$E_{k,l}$ が $E_{i,i+1}$ と $E_{i+1,i}$ たちの括弧積で表されることを使えば計算することができる。

これを用いて $\phi \in C^\infty_{\tau_\lambda}(K\backslash G/N;\eta)$ を

$$\phi(g) = \sum_{Q\in GZ(\lambda)} c(Q;g)Q$$

と表す。$\phi(g) \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ を決定するには $\phi|_A \in \mathrm{Ker}R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta})$ を求めれば十分である。

$V_\lambda \otimes \mathrm{Ad}$ から $V_k^\pm$ への射影作用素を $P_k^\pm$ で表し、V_λ を highest weight が $\tilde{\lambda} = (\lambda_1+1)e_1 + \sum_{i=2}^{n+1}\lambda_{i-1}e_i$ (resp. $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i + (\lambda_n - 1)e_{n+1}$) である $U(n+1)$ の既約

有限次元表現に

$$GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ & & Q & \end{pmatrix} \in GZ(\tilde{\lambda})$$

$$\left(\text{resp. } GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \hat{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \lambda_n - 1 \\ & & Q & \end{pmatrix} \in GZ(\hat{\lambda})\right)$$

となるように埋め込んでおく。

また $V_k^{\pm}$ $(1 \le k \le n)$ を highest weight がそれぞれ $\tilde{\tilde{\lambda}} := \tilde{\lambda} + \sum_{i=1}^{n+1} e_i$ と $\hat{\hat{\lambda}} = \hat{\lambda} - \sum_{i=1}^{n+1} e_i$ である $U(n+1)$ の既約有限次元表現 $V_{\tilde{\tilde{\lambda}}}$ と $V_{\hat{\hat{\lambda}}}$ にそれぞれ

$$\iota_k^+ : GZ(\lambda + e_k') \ni P \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1+2 & \lambda_1+1 & \ldots & \lambda_n+1 \\ & & P & \end{pmatrix} \in GZ(\tilde{\tilde{\lambda}}) \quad (1 \le k \le n),$$

$$\iota_k^- : GZ(\lambda - e_k') \ni P \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_n-1 & \lambda_n-2 \\ & & P & \end{pmatrix} \in GZ(\hat{\hat{\lambda}}) \quad (1 \le k \le n),$$

となるように埋め込むことができる。ここで作用素 $\tilde{\sigma}_{k,n}$ と $\hat{\tau}_{k,n}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{k,n} : GZ(\tilde{\lambda}) \ni \tilde{Q} = (q_{i,j}) \mapsto \tilde{\sigma}_{k,n}\tilde{Q} &= (\tilde{q}_{i,j}) \in GZ(\tilde{\tilde{\lambda}}) \\ \tilde{q}_{i,j} &= q_{i,j} + 1 \quad ((i,j) \neq (k,n)) \\ \tilde{q}_{k,n} &= q_{k,n} + 2 \\ \hat{\tau}_{k,n} : GZ(\hat{\lambda}) \ni \hat{Q} = (q_{i,j}) \mapsto \hat{\tau}_{k,n}\hat{Q} &= (\hat{q}_{i,j}) \in GZ(\hat{\hat{\lambda}}) \\ \hat{q}_{i,j} &= q_{i,j} - 1 \quad ((i,j) \neq (k,n)) \\ \hat{q}_{k,n} &= q_{k,n} - 2. \end{aligned}$$

で定義する。このとき [Kr] の方法を用いると、$\iota_k^{\pm} \circ P_k^{\pm}$ は次のように表される。(簡便のため、$\iota_k^{\pm} \circ P_k^{\pm}$ も $P_k^{\pm}$ とかくことにする。)

命題 ([Kr, Proposition 4.3])
任意の $Q \in GZ(\lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} P_k^+(Q \otimes E_{n,n+1}) &= a_{k,n}(\tilde{Q})\tilde{\sigma}_{k,n}\tilde{Q} \\ P_k^-(Q \otimes E_{n+1,n}) &= b_{k,n}(\hat{Q})\hat{\tau}_{k,n}\hat{Q}. \end{aligned}$$

が成り立つ。

この命題と、$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の元の(複素化された)岩沢分解を使って計算をすると、$c(Q;a)$ たちが満たすべき微分差分方程式が次のような形で得られる。

命題
任意の $1 \le k \le n$ に対して

$$P_k^+(R(\nabla_{\tau_\lambda,\eta})\phi(a)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{Q \in GZ(\lambda)} a_{k,n}(\tilde{Q}) \left(a\frac{d}{da} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 2\lambda_k - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,n-1} + 2k - 2 \right) c(Q;a)\tilde{\sigma}_{k,n}\tilde{Q}$$

$$-\frac{\xi}{a} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\tau_{j,n-1}Q \in GZ(\lambda)} \frac{a_{k,n}(\tilde{Q})a_{j,n-1}(\tau_{j,n-1}\tilde{Q})}{\lambda_k - q_{j,n-1} - k + j + 1} c(\tau_{j,n-1}Q;a)\tilde{\sigma}_{k,n}\tilde{Q} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&P_k^-(R(\nabla_{\tau_\lambda,\eta})\phi(a))=0\\
&\iff \sum_{Q\in GZ(\lambda)} b_{k,n}(\hat{Q})\left(a\frac{d}{da}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+2\lambda_k+\sum_{i=1}^{n-1}q_{i,n-1}+2n-2k\right)c(Q;a)\hat{\tau}_{k,n}\hat{Q}\\
&\qquad +\frac{\xi}{a}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\sigma_{j,n-1}Q\in GZ(\lambda)}\frac{b_{k,n}(\hat{Q})b_{j,n-1}(\sigma_{j,n-1}\hat{Q})}{\lambda_k-q_{j,n-1}-k+j}c(\sigma_{j,n-1}Q;a)\hat{\tau}_{k,n}\hat{Q}=0
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

一方、$\lambda\in\Xi_k$ のとき、$\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g)=0$ は

$$
\begin{aligned}
P_1^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))&=\cdots=P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))\\
&=P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))=\cdots=P_n^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))=0
\end{aligned}
$$

と同値である。上の命題を使ってこの連立微分差分方程式を解いて行けば良い。その方針を簡単に述べておく。

まず前の命題の式を注意深く見てやれば、$l(\leq n-1)$ に対して $P_l^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a))=0$ なら、 $q_{l,n-1}=\lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a)=0$ となることが分かる。これより再び命題の式を繰り返して用いることにより、$q_{l-1,n-2}>\lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a)=0$ であることが分かる。同様にして、$l(\geq 2)$ に対して $P_l^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(a))=0$ なら、$q_{l-1,n-2}<\lambda_l$ となる Q に対して $c(Q;a)=0$ であることが分かる。よって $\Lambda\in\Xi_k$ のとき、

$$
\begin{aligned}
P_1^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))&=\cdots=P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))\\
&=P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))=\cdots=P_n^+(\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g))=0
\end{aligned}
$$

であるから、まず $\Lambda\in\Xi_1\cup\Xi_{n+1}$ の時にはこの方程式系は自明な（つまり$\phi=0$）解しか持たないことがわかる。

更に命題の式には、Q の $q_{k,n-1}$ についての差分があるので、これを使えば N の指標 η を $(**)$ のように定めると、$\Lambda\in\Xi_k$ $(2\leq k\leq n)$ のとき、$\phi\in\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ は

$$
\begin{aligned}
&q_{1,n-1}=q_{1,n-2},\ldots,q_{k-2,n-1}=q_{k-2,n-2}\\
&q_{k-1,n-1}=\lambda_{k-1}\\
&q_{k-1,n-2}=q_{k,n-1},\ldots,q_{n-2,n-2}=q_{n-1,n-1}
\end{aligned}
$$

となる Q に対する $c(Q;a)$ $(a\in A)$ を決めればすべて決定されることがわかる。

ここで Q がこの条件を満たすとき、命題の式を使うと $c(Q;a)$ は実は

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(a\frac{d}{da}+A-q_{k-1,n-1}+2k-2\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(a\frac{d}{da}+A+q_{k-1,n-1}+2n-2k+2\right)-\frac{\xi^2}{a^2}\right\}c(Q;a)=0
\end{aligned}
$$

（但し $A=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i-\sum_{i=k}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{k-2}q_{i,n-1}+\sum_{i=k}^{n-1}q_{i,n-1}$）という方程式を満たすことがわかる。$t=\frac{2\xi}{a}$, $c(Q;\frac{2\xi}{t})=t^{A+n-\frac{1}{2}}f(Q;t)$ とおくと、$f(Q;t)$ は

$$
\left\{t^2\frac{d^2}{dt^2}-\frac{t^2}{4}-(q_{k-1,n-1}+n-2k+2)^2+\frac{1}{4}\right\}f(Q;t)=0
$$

という方程式を満たす。これはいわゆる Whittaker の合流型超幾何方程式である（[W-W] 参照)。これより $c(Q;a)$ の具体的な表示が得られる。

最後に、埋め込みの次元は松本久義氏による Whittaker model の次元と Bernstein degree の関係（[M] 参照）と、Chang の計算による $\mathbb{R}$-rank one のリー群の離散系列表現の characteristic cycyle の計算（[C] 参照）を使えば得られる。

以上のことより次の定理を得る。

定理

(1) N の任意の非退化指標 ζ に対し、$\Lambda \in \Xi_1$ または $\Lambda \in \Xi_{n+1}$ のとき、$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta)) = \{0\}$ 。

(2) N の任意の非退化指標 ζ に対し、$\Lambda \in \Xi_k$ $(k=2,3,\ldots,n)$ のとき、

$$\begin{aligned}&\dim\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N;\zeta))\\ &\quad = 2 \sum_{\substack{\lambda_1\ge\mu_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_{k-2}\ge\mu_{k-2}\ge\lambda_{k-1}\\ \lambda_k\ge\mu_{k-1}\ge\lambda_{k+1}\ge\cdots\ge\lambda_{n-1}\ge\mu_{n-2}\ge\lambda_n}} \dim V_{n-2}(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})\end{aligned}$$

が成り立つ。但し $V_{n-2}(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ は highest weight が $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ である $U(n-2)$ の既約有限次元表現である。

(3) N の指標 η を $(**)$ のように定めると、$\Lambda \in \Xi_k$ $(2 \le k \le n)$ のとき、$\phi \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ は

$$\begin{aligned}&q_{1,n-1} = q_{1,n-2}, \ldots, q_{k-2,n-1} = q_{k-2,n-2}\\ &q_{k-1,n-1} = \lambda_{k-1}\\ &q_{k-1,n-2} = q_{k,n-1}, \ldots, q_{n-2,n-2} = q_{n-1,n-1}\end{aligned}$$

となる Q に対する $c(Q;a)$ $(a\in A)$ を決めればすべて決定される。

(4) (3) の条件をみたす Q に対し、$c(Q;a)$ は

$$\begin{aligned}c(Q;a) &= a^{-\sum_{q=1}^{k-1}\lambda_q + \sum_{q=k}^{n}\lambda_q + \sum_{q=1}^{k-2} q_{q,n-1} - \sum_{q=k}^{n-1} q_{q,n-1} - n + \frac{1}{2}}\\ &\quad\times\left\{c_1(Q)W_{0,\lambda_{k-1}+n-2k+2}\left(\frac{2\xi}{a}\right) + c_2(Q)M_{0,\lambda_{k-1}+n-2k+2}\left(\frac{2\xi}{a}\right)\right\}\end{aligned}$$

と表される。但し $c_1(Q), c_2(Q)$ は任意定数、$W_{\alpha,\beta}(t), M_{\alpha,\beta}(t)$ は Whittaker の合流型超幾何関数である。

4. 結果に対する observation

最後の定理の次元公式は、Chang ([C]) と Matumoto ([M]) の結果を使ったものである。これを我々の観点から見てみよう。

$Z_M(\eta)$ を M における η の centralizer とする。$G = SU(n,1)$ で η が自明でないとき、$Z_M(\eta)$ は（modulo center で）$U(n-2)$ と同型である。$Z_M(\eta)$ は $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ に右から作用するので（**2.** の計算の簡略化の項参照）、$\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ は既約 $Z_M(\eta)$-加群に分解される。最後の定理の（$\Lambda \in \Xi_k$ $(2 \le k \le n)$ に対する）次元公式は、この既約分解にどの既約 $Z_M(\eta)$-加群が現れるかを表しており、また

その既約表現の highest weight がコンパクト単純ルートで決まってくることを意味している。もっと詳しく言うと、Ξ_k に対応する Δ_k^+ のコンパクト単純ルートは $\{e_1-e_2,\ldots,e_{k-2}-e_{k-1},e_k-e_{k+1},\ldots,e_{n-1}-e_n\}$ である。次元公式の和は $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\tau_\lambda,\eta}$ に現れる $Z_M(\eta)$-既約成分の highest weight $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ は「コンパクト単純ルートの間に」ある、つまり

$$
\begin{array}{cccccccccc}
e_1 & & e_2 & & \cdots & & e_{k-2} & & e_{k-1} & \\
\circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ & - & \circ & - \\
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \cdots & & \lambda_{k-2} & & \lambda_{k-1} & \\
 & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & & \\
 & \mu_1 & & \mu_2 & \cdots & \mu_{k-3} & & \mu_{k-2} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & e_{n+1} & & e_k & & e_{k+1} & & \cdots & & e_{n-1} & & e_n \\
- & \bullet & - & \circ & - & \circ & - & \cdots & - & \circ & - & \circ \\
 & & & \lambda_k & & \lambda_{k+1} & & \cdots & & \lambda_{n-1} & & \lambda_n \\
 & & & & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & & \leftrightarrow & \\
 & & & & \mu_{k-1} & & \mu_k & \cdots & \mu_{n-3} & & \mu_{n-2} &
\end{array}
$$

となっていることを示している。

これと類似のことが、他の Lie 群の quasi-large な離散系列表現に対しても成り立つのではないかと私は予想している。(ちなみに $G=Spin(2n,1)$ の時にはこの予想どうりになっていることは私は確認している。)

References

[C] Chang, J-T., *Characteritic cycles of discrete series for $\mathbb{R}$-rank one groups*, Transactions of the American mathematical society **341** (1994), 603-622.

[G-Z] Gel'fand,I.M. and Zetlin,M.L., *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Dokul. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), 825-828.

[Kr] Kraljević, H., *Representations of the universal covering group of the group $SU(n,1)$*, Glasnik Matematički **8(28)-No.1-** (1973), 23-72.

[K-O] Koseki,H. and Oda,T., *Whittaker functions for the large discrete series representations of $SU(2,1)$ and related zeta integrals, preprint.*

[M] Matumoto,H., *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta mathematica **161** (1988), 183-241.

[O1] Oda,T., *An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2,\mathbb{R})$ for the large discrete series representations* (to appear in Tohoku J. Math).

[O2] ———, *An explicit integral representation of Whittaker functions for the representations of the discrete series —The case of $SU(2,2)$— , preprint.*

[W-W] Whittaker,E.T., Watson,G.N., *A Course in Modern Analysis*, Cambridge University Press, London, 1963.

[Y1] Yamashita,H., *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I —General theory and the case of $SU(2,2)$—*, Japan J. Math. **16** (1990), 31-95.

[Y2] ———, *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, II —Generalized Whittaker models for $SU(2,2)$—*, J. Math. Kyoto Univ. **31-2** (1991), 543-571.